Untersuchungen über Resonanzkurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt

von

Max Grober

aus Sprötau.

Halle a. S.

Buchdruckerei des Waisenhauses.

1909.

Referent: Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Dorn.

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0018

Gebrauchte Abkürzungen.

Diese Arbeit anschließend an	K. E. F. Schmidt	Bjerknes	Drude	Zenneck
Zeit	t	t	t	t
Stromstärke	J, i	—	i	i
Widerstand	W, w	—	w	w
Spannung	$E\,e$	φ	V	V
Induktionskoeffizient	L	—	L	p
Kapazität	C	—	C	c
Frequenz	n	—	—	$\frac{n}{2}$
Resonanzfrequenz	n_R	—	—	n_r
in 2π Sec.	ν	a, b	—	—
Verstimmung	$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 \pm \varepsilon$	—	—	$\frac{n_2}{n_1}$
$\sqrt{-1}$	j	—	i	—
Dämpfungsexponent	δ	α, β	δ	δ
log. Dekrement	$\Lambda = \frac{\delta}{n}$	γ, δ	—	$d = \frac{\delta}{\left(\frac{n}{2}\right)}$
Q im Isochronitätspunkt	Q_{Js}	—	—	—

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Die Differentialgleichung und ihre Integration 7
§ 2. Das Integral, seine Umformung und Auswertung 10
§ 3. Numerische Auswertung des Integrales für verschiedene Dämpfungswerte in der Nähe des Isochronitätspunktes . . 14
§ 4. Tafeln für die Dämpfungskurven 14
§ 5. Dekrementtafeln 18
§ 6. Der Fall $\delta_1 = \delta_2$ 18
§ 7. Der Fall $\delta_1 = 0$ 23
§ 8. Zur Unsymmetrie 24
§ 9. Andere graphische Methoden 27
§ 10. Zusammenfassung 33

§ 1.

Die Differentialgleichung und ihre Integration.

In seiner Arbeit „Über Messung der Dämpfung in elektrischen Schwingungskreisen“[1] geht K. E. F. Schmidt von der Überlegung aus, daß die theoretisch für verschiedene Dämpfungswerte berechneten Resonanzkurven bestimmte Größen ergeben, die tabellarisch oder graphisch aufgetragen, gestatten, durch einfache Messungen aus den experimentell ermittelten die Größe des logarithmischen Dekrementes zu finden. Die dort aufgestellten Dekrementtafeln sind ausgedehnt auf logarithmische Dekremente von $\Lambda = 0{,}12$ bis $\Lambda = 0{,}376$. Für kleinere Werte scheinen die dort vernachlässigten Größen, deren Wegfall die Arbeit wesentlich vereinfacht, bedeutenden Einfluß zu haben. Die folgende Arbeit wurde unternommen, um den Einfluß der in früheren Arbeiten vernachlässigten Größen kennen zu lernen. Sie enthält die streng durchgeführte Integration der Differentialgleichung und eine numerische Auswertung der Integrale für besondere, der Praxis entnommene Fälle, da die ganz allgemeine Diskussion zu ungeheuer großen Schwierigkeiten führt.

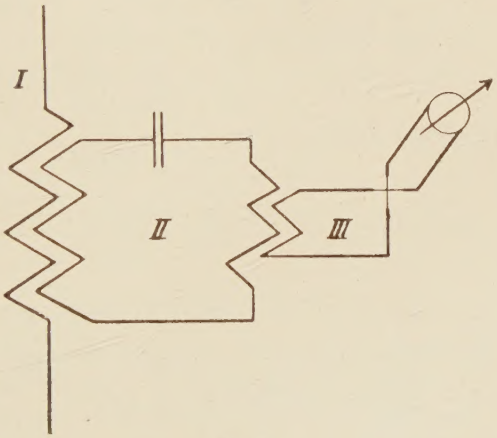


Fig. 1.

Das Schaltungsschema zur experimentellen Bestimmung der logarithmischen Dekremente ist in Fig. 1 skizziert. In *I* läuft die zu untersuchende Schwingung ab. An Kreis *I* ist magnetisch gekoppelt der Meßkreis *II*, in ihm befindet sich eine variable Kapazität oder Induktanz. Durch eine zweite Kopplung *II*/*III* wird in *III* eine erzwungene Schwingung erzeugt, die auf ein Thermoelement oder einen Indikator

1) K. E. F. Schmidt, Physikalische Zeitschrift IX, S. 13ff.

mit Integraleffekt wirkt. Die Wertigkeit beider Kopplungen ist dementsprechend verschieden. Wir setzen, gestützt auf anderweitig zu veröffentlichendes experimentelles Material, i_3 proportional i_2 und die im Thermoelement entwickelte Wärmemenge

$$= c \int_0^\infty i^2 dt$$

Zunächst will ich genau im Anschluß an die oben zitierte Arbeit von K. E. F. Schmidt die Differentialgleichung für die Schwingung und die Größe der Wirkung im dritten Kreise herleiten. Die in *II* erzeugte Schwingung läßt sich mit Benutzung der S. 5 angegebenen Bezeichnungen durch folgende Differentialgleichung darstellen

1. $$L_{22}\frac{d^2 i_2}{dt^2} + w_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2} = -L_{12}\left\{-\delta_1 + \nu_1 j\right\}^2 J_1 e^{\nu_1 j t} e^{-\delta_1 t}.$$

Setzt man nun

$$\delta_1{}^2 - \nu_1{}^2 = \sigma \cos \chi$$
$$2\delta_1 \nu_1 = \sigma \sin \chi,$$

so geht die Gleichung 1 über in

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{w_2}{L_{22}} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{L_{22} C_2} = -\frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \sigma \cdot J_1 e^{-\delta_1 t} e^{j(\nu_1 t - \chi)}.$$

Zur Integration wird zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{w_2}{L_{22}} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{L_{22} C_2} = 0$$

integriert durch

$$i_2 = e^{(-\delta_2 \pm \nu_2 j)t}$$

wo

$$2\delta_2 = \frac{w_2}{L_{22}}$$

$$\nu_2{}^2 + \delta_2{}^2 = \frac{1}{L_{22} C_2}.$$

Mit Einführung von δ_2, ν_2 geht die vollständige Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{di_2}{dt} + (\nu_2{}^2 + \delta_2{}^2) i_2 = -\frac{L_{12}}{L_{22}} \sigma \cdot J_1 \cdot e^{-\delta_1 t j (\nu_1 t - \chi)}.$$

Setzt man hierin

$$i_2 = J_2{}' e^{-\delta_1 t} e^{j(\nu_1 t - \chi)}$$

so findet man

$$J_2{}' = -\frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot J_1 \cdot e^{-j\psi}$$

wobei ϱ und ψ aus

$$\nu_2{}^2 - \nu_1{}^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2 = \varrho \cos \psi$$
$$2\nu_1(\delta_2 - \delta_1) = \varrho \sin \psi$$

zu bestimmen sind.

Bildet man aus dem obigen das allgemeine Integral und nimmt die reellen Teile, so wird

$$i_2 = J' e^{-\delta_2 t} \cos \nu_2 t + J'' e^{-\delta_2 t} \sin \nu_2 t - J_1 \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot e^{-\delta_1 t} \cos(\nu_1 t - \chi - \psi).$$

Nimmt man hierzu die Anfangsbedingungen, daß für

$$t = 0$$
$$i_2 = 0 \text{ und}$$
$$\frac{di_2}{dt} = 0 \text{ werden, so heißt dies}$$

$$0 = J' - J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \cos(\chi + \psi)$$

$$0 = J' \cdot (-\delta_2) + J'' \nu_2 - J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot (-\delta_2) \cos(\chi + \psi)$$
$$+ \nu_1 J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \sin[-(\chi + \psi)].$$

Aus diesen Bestimmungsgleichungen ergibt sich

$$J' = J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \cos(\chi + \psi)$$

$$\nu_2 J'' = -(\delta_1 - \delta_2) J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \cos(\chi + \psi) + \nu_2 J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \sin(\chi + \psi)$$

$$J'' = \left\{ -\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2} \cos(\chi + \psi) + \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin(\chi + \psi) \right\} J_1 \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}}.$$

Durch Substitution dieser Werte für J' und J'' in die allgemeine Form des Integrales erhält man dann

$$i_2 = -J_1 \left\{ e^{-\delta_2 t} \left[-\cos(\chi + \psi) \cos \nu_2 t + \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2} \cos(\chi + \psi) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin(\chi + \psi) \right) \sin \nu_2 t \right] + e^{-\delta_1 t} \cos(\nu_1 t - \chi - \psi) \right\} \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}.$$

Setzt man nun noch

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2} \cos(\chi + \psi) - \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin(\chi + \psi) = P \cos \mu$$
$$\cos(\chi + \psi) = P \sin \mu,$$

so erhält das Integral die Form

$$i_2 = -J_1 \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \left[e^{-\delta_2 t} P \sin(\nu_2 t - \mu) + e^{-\delta_1 t} \cos(\nu_1 t - \chi - \psi) \right]$$

und somit wird die Wärmemenge gemäß der oben angegebenen, experimentell begründeten Annahme

$$Q = c\int_0^\infty i_2^2\,dt$$

$$= cJ_1^2 \cdot \frac{L_{12}^2}{L_{22}^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\varrho^2}\Big[P^2\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin^2(\nu_2 t-\mu)\,dt$$

$$+ 2P\int_0^\infty e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\sin(\nu_2 t-\mu)\cos(\nu_1 t-\chi-\psi)\,dt$$

$$+\int_0^\infty e^{-2\delta_1 t}\cos^2(\nu_1 t-\chi-\psi)dt\Big].$$

Es kommt nunmehr darauf an, diese Größe Q darzustellen als Funktion der Größen δ_1, δ_2, ν_1 und ν_2.

§ 2.

Das Integral, seine Umformung und Auswertung.

Das Integral Q läßt sich als Summe der drei folgenden Integrale Q_1', Q_2', Q_3' schreiben:

$$Q_1' = c\int_0^\infty \frac{L_{12}^2}{L_{22}^2} J_1^2 \frac{\sigma^2}{\varrho_2} P^2 e^{-2\delta_2 t}\sin^2(\nu_2 t-\mu)\,dt$$

$$= cJ_1^2\frac{L_{12}^2}{L_{22}^2}Q_1 \text{ ist, wenn}$$

$$Q_1 = \frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin^2(\nu_2 t-\mu)\,dt$$

$$Q_2' = c\frac{L_{12}^2}{L_{22}^2}J_1^2\cdot 2\frac{\sigma^2}{\varrho^2}P\int_0^\infty e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\sin(\nu_2 t-\mu)\cos(\nu_1 t-\chi-\psi)\,dt$$

$$= c\frac{L_{12}^2}{L_{22}^2}J_1^2\cdot Q_2$$

$$Q_2 = 2P\cdot\frac{\sigma^2}{\varrho^2}\int_0^\infty e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\sin(\nu_2 t-\mu)\cos(\nu_1 t-\chi-\psi)\,dt$$

und $$Q_3' = c\frac{L_{12}^2}{L_{22}^2}J_1^2\frac{\sigma^2}{\varrho^2}\int_0^\infty e^{-2\delta_1 t}\cos^2(\nu_1 t-\chi-\psi)\,dt$$

$$= c\frac{L_{12}^2}{L_{22}^2}J_1^2\cdot Q_3$$

$$Q_3 = \frac{\sigma^2}{\varrho^2}\int_0^\infty e^{-2\delta_1 t}\cos^2(\nu_1 t-\chi-\psi)\,dt.$$

Unter Zurückführung dieser Integrale durch geeignete Substitutionen auf Normalintegrale und Einsetzen bestimmter in § 1 angegebener Relationen erhalten wir der Reihe nach numerisch auswertbare Integrale. In

$$Q_1 = \frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\int_0^{\infty} e^{-2\delta_2 t}\sin^2(\nu_2 t - \mu)\,dt$$

führt man ein

$$\nu_2 t - \mu = x$$
$$\nu_2\,dt = dx$$

woraus sich die Grenzen bestimmen

zu $x = -\mu$ für $t = 0$

$x = \infty$ $t = \infty$.

Also wird

$$Q_1 = \nu_2\frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\int_{-\mu}^{\infty} e^{-2\delta_2\left(\frac{x+\mu}{\nu_2}\right)}\sin^2 x\,dx$$

$$= \nu_2\frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\,e^{-2\delta_2\frac{\mu}{\nu_2}}\int_{-\mu}^{\infty} e^{-\frac{2\delta_2}{\nu_2}x}\sin^2 x\,dx$$

$$= \nu_2\frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\,e^{-2\delta_2\cdot\frac{\mu}{\nu_2}}\cdot\left|\frac{-\frac{2\delta_2}{\nu_2}\sin x - 2\cos x}{\left(\frac{2\delta_2}{\nu_2}\right)^2+4}\cdot e^{-\frac{2\delta_2}{\nu_2}\cdot x}\cdot\sin x\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\left(\frac{2\delta_2}{\nu_2}\right)^2+4}\cdot\frac{-1}{\frac{2\delta_2}{\nu_2}}\cdot e^{-\frac{2\delta_2}{\nu_2}\cdot x}\right|_{-\mu}^{\infty}$$

$$= -\nu_2\frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\cdot e^{-2\delta_2\frac{\mu}{\nu_2}}\left\{\frac{-\frac{2\delta_2}{\nu_2}\sin(-\mu) - 2\cos(-\mu)}{\frac{4\delta_2^2+4\nu_2^2}{\nu_2^2}}e^{+\frac{2\delta_2}{\nu_2}\cdot\mu}\cdot\sin(-\mu)\right.$$

$$\left. + \frac{2\nu_2^2}{4\delta_2^2+4\nu_2^2}\cdot\frac{-\nu_2}{2\delta_2}\,e^{+\frac{2\delta_2}{\nu_2}\mu}\right\}$$

$$= \frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\left(\frac{2\delta_2\sin\mu - 2\nu_2\cos\mu}{4(\delta_2^2+\nu_2^2)}\sin\mu + \frac{\nu_2^2}{2(\delta_2^2+\nu_2^2)}\cdot\frac{1}{2\delta_2}\right)$$

Aus den Relationen des § 1 folgt nun

$$\sin\mu = \frac{1}{P}\cos(\chi+\psi)$$

$$= \frac{1}{P}(\cos\chi\cos\psi - \sin\chi\sin\psi)$$

$$= \frac{1}{P}\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\varrho}\left\{(\delta_1^2-\nu_1^2)(\nu_2^2-\nu_1^2+(\delta_2-\delta_1)^2) - 2\delta_1\nu_1\cdot 2\nu_1(\delta_2-\delta_1)\right\}$$

$$= \frac{A}{P\varrho\sigma}$$

wenn $A = (\delta_1^2 - \nu_1^2)\{\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2\} - 4\delta_1\nu_1^2(\delta_2 - \delta_1)$.

Ferner wird

$$\cos\mu = \frac{1}{P}\left\{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2}\cos(\chi+\psi) - \frac{\nu_1}{\nu_2}\sin(\chi+\psi)\right\}$$

$$= \frac{1}{P}\left\{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2}\cdot\frac{A}{\varrho\cdot\sigma} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\left[\frac{1}{\sigma\cdot\varrho}\cdot 2\delta_1\nu_1(\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2-\delta_1)^2) + \frac{1}{\varrho\cdot\sigma}(\delta_1^2 - \nu_1^2)\,2\nu_1(\delta_2-\delta_1)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{P\varrho\sigma\nu_2}\left\{(\delta_1-\delta_2)A - 2\nu_1^2 B\right\} \text{ wenn}$$

$$B = \delta_1(\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2-\delta_1)^2) + (\delta_1^2 - \nu_1^2)(\delta_2-\delta_1).$$

Somit ergibt sich

$$Q_1 = \frac{P^2\sigma^2}{\varrho^2}\left\{\frac{2\delta_2\cdot\frac{A}{P\varrho\sigma} - 2\nu_2\frac{1}{P\varrho\sigma\nu_2}\left[(\delta_1-\delta_2)A - 2\nu_1^2 B\right]}{4(\delta_2^2+\nu_2^2)}\cdot\frac{A}{P\varrho\sigma} + \frac{\nu_2^2}{4\delta_2(\delta_2^2+\nu_2^2)}\right\}$$

$$- \frac{1}{\varrho^4}\cdot\frac{\delta_2 A - (\delta_1-\delta_2)A + 2\nu_1^2 B}{2(\delta_2^2+\nu_2^2)}\cdot A + \frac{\nu_2^2 P^2\sigma^2}{4\delta_2\varrho^2(\delta_2^2+\nu_2^2)}.$$

Nunmehr führe ich noch P^2 als Ausdruck der Größen A, B, δ_1, δ_2, ν_2, ν_1 ein. Es bestimmt sich zu

$$P^2 = \left\{\frac{\delta_1-\delta_2}{\nu_2}\cos(\chi+\psi) - \frac{\nu_1}{\nu_2}\sin(\chi+\psi)\right\}^2 + \cos^2(\chi+\psi)$$

$$= \left(\frac{\delta_1-\delta_2}{\nu_2}\right)^2\cdot\frac{A^2}{\varrho^2\cdot\sigma^2} - 2\frac{\delta_1-\delta_2}{\nu_2}\cdot\frac{2\nu_1^2}{\nu_2}\cdot\frac{A\cdot B}{\varrho^2\cdot\sigma^2} + \frac{4\nu_1^4 B^2}{\nu_2^2} + \frac{A^2}{\varrho^2\cdot\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2\sigma^2}\left\{A^2\left(1 + \left(\frac{\delta_1-\delta_2}{\nu_2}\right)^2\right) + \frac{4\nu_1^4}{\nu_2^2}B^2 - \frac{4(\delta_1-\delta_2)}{\nu_2}\cdot\frac{\nu_1^2}{\nu_2}\cdot A\cdot B\right\}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2\cdot\sigma^2\cdot\nu_2^2}\left\{A^2(\nu_2^2 + (\delta_1-\delta_2)^2) + 4\nu_1^4 B^2 - 4(\delta_1-\delta_2)\nu_1^2 A\cdot B\right\}$$

und somit wird

$$Q_1 = \frac{1}{\varrho^4}\left[\frac{(2\delta_2-\delta_1)A^2 + 2\nu_1^2 A\cdot B}{2(\delta_2^2+\nu_2^2)} + \frac{A^2(\nu_2^2 + (\delta_2-\delta_1)^2) + 4\nu_1^4 B^2 - 4(\delta_1-\delta_2)\nu_1^2 AB}{4\delta_2(\delta^2{}_2+\nu_2^2)}\right]$$

$$- \frac{1}{4\varrho^4\delta_2(\delta_2^2+\nu_2^2)}\left\{A^2(5\delta_2^2 - 4\delta_1\delta_2 + \delta_1^2 + \nu_2^2) + 4\nu_1^2(2\delta_2-\delta_1)AB + 4\nu_1^4 B^2\right\}$$

In dieser Form werden wir das Integral später zur Rechnung benutzen.

Das dritte Integral Q_3 kann durch die Substitution

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

zerlegt werden in zwei Integrale, deren erstes über eine Exponentialfunktion erstreckt ist und deren zweites analog wie Q_1 gebaut ist. Jedoch führt die Transformation

$$\nu_1 t - \chi - \psi = x$$

in Q_3 direkt eingesetzt einfacher zum Ziele.

Es wird $\nu_1 \, dt = dx$

und die Grenzen bestimmen sich zu

$$x = -\chi - \psi \text{ entsprechend } t = 0$$
$$x = \infty \qquad\qquad t = \infty.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich dann

$$Q_3 = \frac{1}{\varrho^4} \cdot \frac{\delta_1 A^2 + 2\nu_1^2 AB}{2(\delta_1^2 + \nu_1^2)} + \frac{\nu_1^2(\delta_1^2 + \nu_1^2)}{4\delta_1 \varrho^2} \cdot \cdots$$

Um das Integral Q_2 auf eine bekannte Form zu bringen, wenden wir folgende trigonometrische Beziehung an:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big] \cdot$$

Es wird dann

$$Q_2 = 2P \cdot \frac{\sigma^2}{\varrho^2_0} \int e^{\infty - (\delta_1+\delta_2)t} \sin(\nu_2 t - \mu)\cos(\nu_1 t - \chi - \psi)\, dt$$

$$= P\frac{\sigma^2}{\varrho^2_0} \int e^{\infty-(\delta_1+\delta_2)t} \sin\Big\{(\nu_2+\nu_1)t - (\mu+\chi+\psi)\Big\}\, dt$$

$$+ P\frac{\sigma^2}{\varrho^2_0} \int e^{\infty-(\delta_1+\delta_2)t} \sin\Big\{(\nu_2-\nu_1)t - (\mu-\chi-\psi)\Big\}\, dt$$

$$= \frac{P\sigma^2}{\varrho^2}\Bigg| \frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)t}}{(\delta_1+\delta_2)^2 + (\nu_1+\nu_2)^2} \Big\{ -(\delta_1+\delta_2)\sin[(\nu_2+\nu_1)t - (\mu+\chi+\psi)] - (\nu_1+\nu_2)\cos[(\nu_2+\nu_1)t - (\mu+\chi+\psi)] \Big\}$$

$$+ \frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)t}}{(\delta_1+\delta_2)^2 + (\nu_2-\nu_1)^2} \Big\{ -(\delta_1+\delta_2)\sin[(\nu_2-\nu_1)t - (\mu-\chi-\psi)] - (\nu_2-\nu_1)\cos[(\nu_2-\nu_1)t - (\mu-\chi-\psi)] \Big\}\Bigg|_0^\infty$$

$$- \frac{P\sigma^2}{\varrho^2}\Bigg[\frac{-(\delta_1+\delta_2)\sin(\mu+\chi+\psi) + (\nu_1+\nu_2)\cos(\mu+\chi+\psi)}{(\delta_1+\delta_2)^2 + (\nu_1+\nu_2)^2}$$

$$+ \frac{(\delta_1+\delta_2)\sin(\chi+\psi-\mu) + (\nu_2-\nu_1)\cos(\chi+\psi-\mu)}{(\delta_1+\delta_2)^2 + (\nu_2-\nu_1)^2} \Bigg] \cdot$$

Zur weiteren Behandlung müssen nunmehr die sin und cos ausgedrückt werden durch die ν- und δ-Werte. Es ergibt sich für diese

$$\sin(\mu+\chi+\psi) = \frac{\nu_2 A^2 + 2\nu_1(\delta_1-\delta_2)AB - 4\nu_1{}^3 B^2}{P\nu_2\varrho^2\sigma^2}$$

$$\cos(\mu+\chi+\psi) = \frac{A^2(\delta_1-\delta_2) - 2\nu_1(\nu_1+\nu_2)A\cdot B}{P\nu_2\varrho^2\sigma^2}$$

$$\sin(\chi+\psi-\mu) = \frac{2\nu_1(\delta_1-\delta_2)A\cdot B - \nu_2 A^2 - 4\nu_1{}^3 B^2}{P\nu_2\varrho^2\sigma^2}$$

$$\cos(\chi+\psi-\mu) = \frac{A^2(\delta_1-\delta_2) + 2\nu_1(\nu_2-\nu_1)AB}{P\cdot\nu_2\cdot\varrho^2\cdot\sigma^2}.$$

Die Substitution dieser Werte endlich läßt das Integral in der Form

$$Q_2 = \frac{(\nu_1+\nu_2)[A^2(\delta_1-\delta_2) - 2\nu_1(\nu_1+\nu_2)AB] - (\delta_1+\delta_2)[A^2\nu_2 + 2\nu_1(\delta_1-\delta_2)AB - 4\nu_1{}^3B^2]}{\varrho^4\nu_2[(\delta_1+\delta_2)^2+(\nu_1+\nu_2)^2]}$$
$$+\frac{(\delta_1+\delta_2)[2\nu_1(\delta_1-\delta_2)AB - \nu_2 A^2 - 4\nu_1{}^3B^2] + (\nu_2-\nu_1)[A^2(\delta_1-\delta_2) + 2\nu_1(\nu_2-\nu_1)A\cdot B]}{\varrho^4\nu_2[(\delta_1+\delta_2)^2+(\nu_2-\nu_1)^2]}$$

erscheinen.

§ 3.

Numerische Auswertung des Integrale in der Nähe des Isochronitätspunktes für die Werte $\delta_1\cdot\nu_1{}^{-1} = 0{,}001$, $0{,}008$, $0{,}01$, $0{,}05$, $0{,}1$ und für den speziellen Wert $\delta_2\,\nu_1{}^{-1} = 0{,}0055$.

Um diese eben transformierten Integrale numerisch auswerten zu können, dividieren wir jedes Integral durch eine bestimmte Potenz von ν_1 und setzen für $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ Werte ein, die um wenig (ε) von der Einheit abweichen. Also

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 \pm \varepsilon.$$

Die Zahlenrechnungen sind in großen Tabellen zusammengestellt. Das gesamte Material jedoch an dieser Stelle wiederzugeben halte ich nicht für angängig. Nur zwei gekürzte Tabellen will ich mitteilen, nämlich für $\delta_1\,\nu_1{}^{-1} = 0{,}1$ und $\delta_1\,\nu_1{}^{-1} = 0{,}01$.

§ 4.

Tafeln für die Dämpfungskurven.

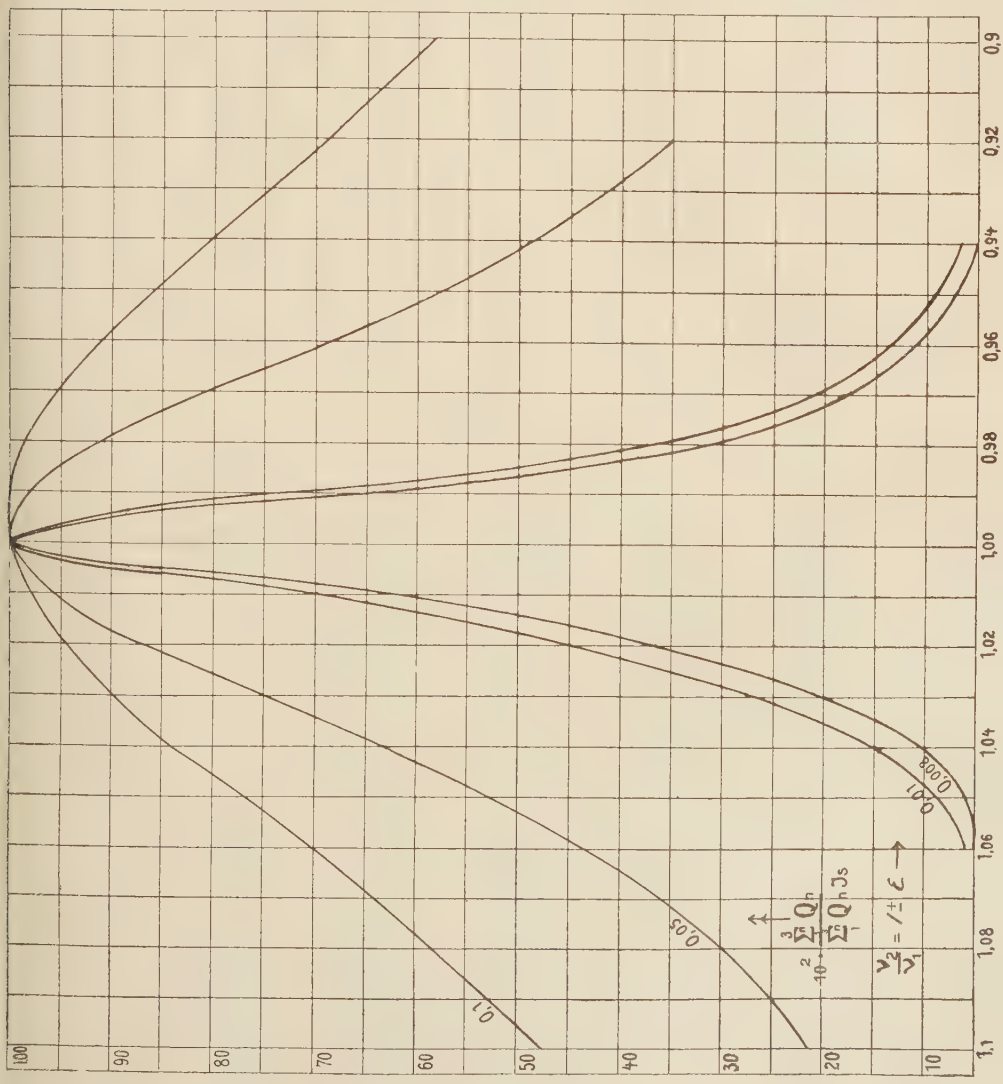
In der Kurventafel I sind zunächst eingetragen die Kurven für $\delta_1\cdot\nu_1{}^{-1} = 0{,}008$, $0{,}01$, $0{,}05$ und $0{,}1$. Als Abszissen werden die Werte für $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ genommen, als Ordinaten hingegen die Werte des Ausdruckes

$$10^2 \cdot \frac{\sum_1^3 n \; Q_n}{\sum_1^3 n \; Q_{Js\,n}}$$

d. h. es werden die Wärmemengen in Prozenten der dem Isochronitätspunkt entsprechenden aufgetragen.

Sämtliche Kurven zeigen eine ausgesprochene Unsymmetrie, eine Überhebung bei negativem ε. Wie und durch welche Glieder diese entsteht, kommt später zur Beantwortung.

Tafel I.



$\nu_1^{-1}\delta_1 = 0{,}01$

$\frac{\nu_2}{\nu_1}$	0,94	0,96	0,98	0,985	0,990	0,995
A	+ 0,116581	0,0785745	0,039756	0,029932	0,020058	0,010134
lg A	0,06651—1	0,89516—2	0,59941—2	0,47614—2	0,30229—2	0,00578—2
lg A^2	0,13302—2	0,79032—3	0,19882—3	0,95228—4	0,60458—4	0,01156—4
lg AB	0,59246—4	0,46520—4	0,21259—4	0,09959—4	0,93583—5	0,64922—5
B	0,003357	0,0037157	0,0041037	0,0042019	0,0043007	0,0043999
lg B	0,52595—3	0,57004—3	0,61318—3	0,62345—3	0,63354—3	0,64344—3
lg B^2	0,05190—5	0,14008—5	0,22636—5	0,24690—3	0,267084—3	0,28688—3
lg ϱ^4	0,26868—4	0,58814—5	0,43392—6	0,96996—7	0,35522—7	0,51054—8
Q_1	3339	7312,3	27637	47212	95924	254070
lg Q_1	3,52361	3,8640	4,44149	4,67405	4,98193	5,40495
Q_{21}	— 4,6	— 15,9	— 123,45	— 274,92	— 770,7	— 2761,2
lg Q_{21}	0,66313	1,20283	2,09148	2,43920	2,88689	3,44110
Q_{22}	— 297,6	— 1356,3	— 14700	— 34533	— 95838	— 324938
lg Q_{22}	2,47363	3,13236	4,16733	4,53824	4,98154	5,51180
Q_2	— 302,2	— 1372,25	— 14823,8	— 34808,2	— 96608,7	— 327699,7
Q_3	1837,47	1837,47	15234,07	26021,97	52915,2	140295
ΣQ	4874,27	9965,48	28047,3	38425,8	52230,5	66665,3
lg ΣQ	3,68792	3,99850	4,44789	4,58482	4,71792	4,82590
$10^2\frac{\Sigma Q}{\Sigma Q_1}$	6,64	13,58	38,25	52,40	71,24	90,91
	0,82265	1,13323	1,58262	0,71935	1,85265	1,95863

$\nu_1^{-1}\delta_1 = 0{,}1$

$\frac{\nu_2}{\nu_1}$	0,94	0,96	0,98	0,985	0,99	0,995
A	0,144195	0,10658	0,06816	0,05837	0,048661	0,038811
lg A	0,15896—1	0,02766—1	0,83355—2	0,76669—2	0,68718—2	0,58895—2
lg A^2	0,31792—2	0,05532—2	0,66710—3	0,53338—3	0,37436—5	0,17790—3
B	0,082808	0,086608	0,090488	0,091471	0,092458	0,093450
lg B	0,91807—2	0,93756—2	0,95659—2	0,96128—2	0,96594—2	0,97058—2
lg B^2	0,83614—3	0,87512—3	0,91318—3	0,92256—3	0,93188—3	0,94116—3
lg AB	0,07703—2	0,96522—2	0,79014—3	0,72797—3	0,65312—3	0,55953—3
ln ϱ^4	0,34920—3	0,21592—3	0,12842—3	0,11636—3	0,10876—3	0,10586—3
Q_1	960,28	1118,3	1234,2	1250,9	1261,1	1264,5
	2,98240	3,04854	3,09144	3,09722	3,10075	3,10191
Q_{22}	— 153,48	— 206,3	— 251,304	— 258,51	— 263,7	— 266,3
Q_{21}	— 10,78	— 11,02	— 8,65	— 7,54	— 6,43	— 4,96
	1,03262	1,04203	0,93732	0,87789	0,80070	0,69545
Q_2	— 164,3	— 217,36	— 259,96	— 266,18	— 270,04	— 271,26
Q_3	59,49	68,174	73,588	74,015	74,01	73,558
	1,72766	1,79430	1,83805	1,84408	1,84788	1,84933
ΣQ	855,17	969,11	1047,93	1058,74	1065,07	1066,8
	2,93205	2,98637	3,02033	3,02480	3,02737	3,02810
$10^2\frac{\Sigma Q}{\Sigma Q_1}$	1,90511	1,95951	1,99347	1,99794	2,00051	2,00130
	80,39	91,10	98,51	99,53	100,13	100,3

$\nu_1^{-1}\delta_1 = 0{,}01$

1,00	1,005	1,010	1,015	1,02	1,04	1,06
0,000160	0,009864	0,019948	0,030062	0,040236	0,081432	0,123428
0,20412 – 4	0,99405—3	0,29990—2	0,47802 – 2	0,60462—2	0,91079—2	0,09142—1
0,40824—8	0,98810—5	0,59980—4	0,95604—4	0,20924—3	0,82158—3	0,18282—2
0,85728—7	0,65681—5	0,97207—5	0,16944—4	0,29517—4	0,63637—4	0,85003—4
0,0044997	0,0046000	0,004701	0,004802	0,004904	0,005316	0,005736
0,65316—3	0,66276—3	0,67217—3	0,68142—3	0,69055—3	0,72558—3	0,75861—3
0,30632—5	0,32552—5	0,34434—5	0,36284—5	0,38110—5	0,45116—5	0,51722—5
0,81618—9	0,52014—8	0,37328—7	0,99652—7	0,46852 6	0,65770—5	0,37296—4
561210	248260	93183	45485	26440	6732	2956
5,74913	5,39487	4,96933	4,65787	4,42227	3,82813	3,4707
— 171,62	+ 2730,9	+ 784,8	+ 292.28	+ 128,26	+ 18,081	+ 5,559
2,23458	3,43631	2,89477	2,46580	2,10809	1,25722	0,74498
— 796483	— 321100	— 93861	— 33473	— 14128	— 1251,5	— 263,8
5,90118	5,50664	4,97250	4,52470	4,15009	3,09744	2,42128
— 796654,9	— 318369	— 93079	— 33180,7	— 14000,1	— 1233,45	— 258,2
308772,97	136019,8	51055,9	24958,45	14514,4	3699,1	1623,44
73328,07	65911	51158,9	37262,7	26954,3	9197,65	4321,34
4,86527	4,81897	4,70891	4,57003	4,43026	3,96368	3,63561
100	88.98	69,78	60,67	36,74	12,53	5,76
2,000	1,95370	1,84364	1,70476	1,56499	1,09841	0,76034

$\nu_1^{-1}\delta_1 = 0{,}1$

1,00	1,005	1,01	1,015	1,02	1,04	1,06
0,028959	0,019034	0,009140	0,000964	0,011037	0,051825	0,093405
0,46179—2	0,27952—2	0,96095—3	0,98408—4	0,04285—2	0,71454—2	0,97035—2
0,92358—4	0,55906—4	0,92190—5	0,96816—7	0,08570—4	0,42908—4	0,94070—3
0,094448	0,0954505	0,096458	0,0974705	0,098488	0,102608	0,106808
0,97519 –2	0,97978—2	0,98434—2	0,98887—2	0,99338—2	0,01118—1	0,02860—1
0,95038—3	0,95956—3	0,96868 –3	0,97774—3	0,98676—3	0,022236—2	0,04720—2
0,43698—3	0,25931—3	0,94529—4	0,97295—5	0,03623—3	0,72572—3	0,99895—3
0,10778—3	0,11454—3	0,12610—3	0,14234—3	0,16308—3	0,28526 –3	0,45322—3
1260,9	1250,2	1230,8	1209,2	1179,9	1022,6	826,55
3,10067	3,09698	3,09090	3,08250	0,09185	3,00972	2,72838
— 266,25	— 263,58	— 258,34	— 250,77	— 241,18	— 189,97	— 133,11
— 3,52	— 2,04	0,58	0,83	2,14	6,11	7,05
0,54666	0,31000	0,76823—1	0,92042—1	0,33024	0,78607	0,84835
— 269,77	— 265,62	— 258,92	— 249,93	— 239,04	— 183,86	— 126,06
72,675	71,397	69,713	67,713	65,445	54,84	44,06
1,84837	1,84499	1,83921	1,83109	1,82072	1,75963	1,67565
1063,8	1055,96	1043,6	1027,2	1006,3	893,6	744,6
3,02686	3,02365	3,01853	3,01157	3,00270	2,95119	2,87192
2,000000	1,99679	1,99167	1,98471	1,97584	1,92433	1,84506
100,00	99,25	98,1	96,54	94,51	84,01	69,99

§ 5.

Die Dekrementtafeln.

Trägt man die entsprechenden Breiten a mehrerer Kurven als Abszissen auf und die zugehörigen $\delta \cdot \nu^{-1}$ als Ordinaten, so erhält man die in Tafel II und III für $10^2 \cdot \frac{\Sigma Q_n}{\Sigma Q_{Js\,n}} = 55,\ 60,\ 65,\ 70,\ 75,\ 80$ und 85 dargestellten Dämpfungslinien; die von K. E. F. Schmidt (l. c. S. 15) gefundene lineare Relation, die sich beim Auswerten des Integrales Q_1 ohne Berücksichtigung von δ_2 ergab, bleibt bei vollkommen exakter Durchführung der komplizierten Berechnung noch für das weitere Intervall $0{,}008 - 0{,}1$ bestehen. Die Geraden gehen aber nicht, wie K. E. F. Schmidt annahm, durch den Koordinatenanfang (vgl. später).

§ 6.

Der Fall $\delta_1 = \delta_2$.

In die Dämpfungskurven wurde dieser Fall nicht mit aufgenommen. Er erfordert eine besondere Behandlung. Wir hatten gesetzt:

$$A = (\delta_1^2 - \nu_1^2)\left\{\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2\right\} - 4\,\delta_1\,\nu_1^2\,(\delta_2 - \delta_1)$$
$$B = \delta_1\left\{\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2\right\} + (\delta_2 - \delta_1)(\delta_1^2 - \nu_1^2)$$
$$\varrho^4 = \left\{\left[\nu_2^2 - \nu_1^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2\right]^2 + 4\,\nu_1^2(\delta_2 - \delta_1)^2\right\}^2$$

drei Werte, die im Isochronitätspunkte ($\nu_1 = \nu_2$) für $\delta_2 = \delta_1$ den Wert Null ergeben. Die Integrale erscheinen somit in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Deshalb wurde sofort in die Differentialgleichung $\delta_1 = \delta_2$ eingeführt. Die Durchführung bietet eine wesentliche Vereinfachung; während ich bei Spezialisierung der allgemeinen Formeln für $\delta_1 = \delta_2$ eine Fläche in einem besonderen Punkte zu untersuchen habe, d. h. hier eine unbestimmte Form in ihrer Abhängigkeit von zwei Variabeln, so brauche ich nunmehr nur eine Kurve zu untersuchen.

Die Differentialgleichung geht über in

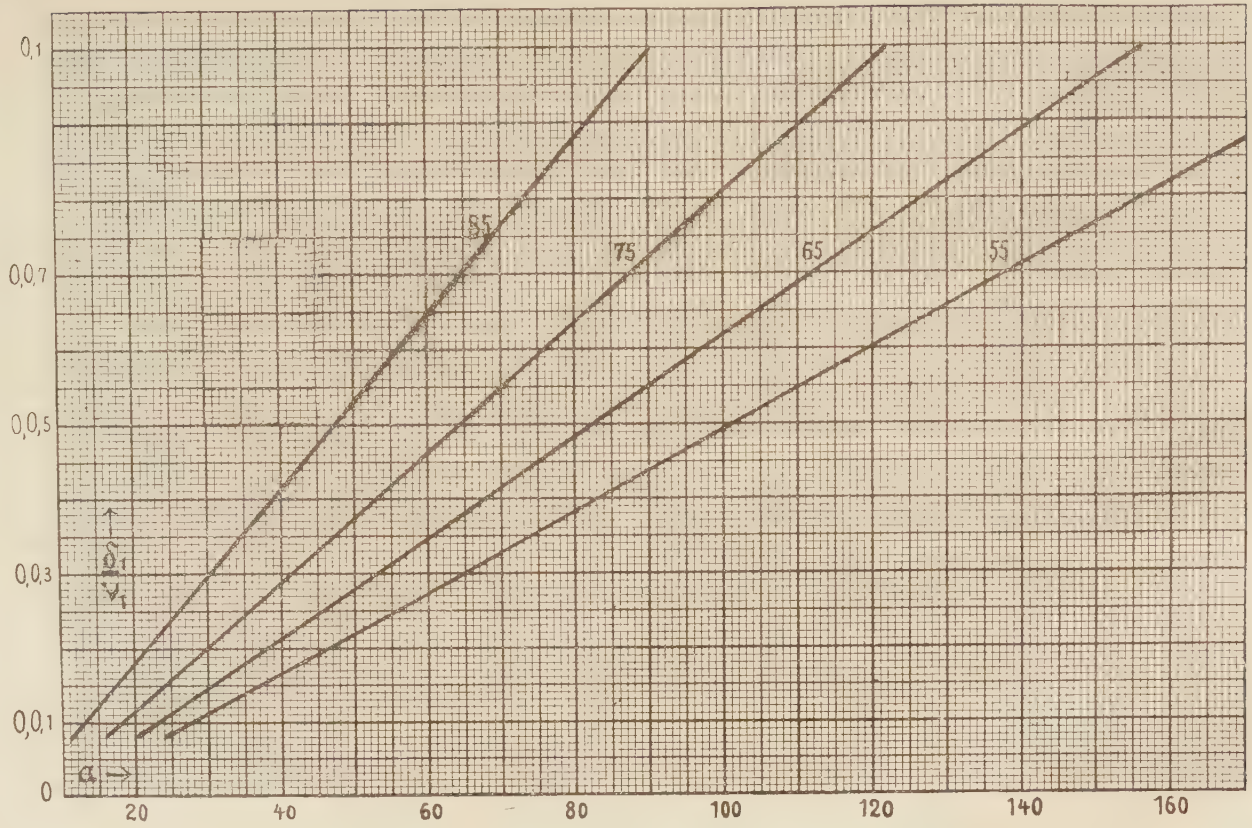
$$L_{22}\frac{d^2 i_2}{dt^2} + w_2\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2} = -L_{12}\left\{\delta_2 + \nu_1 j\right\} J_1\, e^{+\nu_1 jt - \delta_2 t}$$

Durch die Substitutionen

$$\delta_2^2 - \nu_1^2 = \sigma\cos\chi$$
$$2\,\delta_2\,\nu_1 = \sigma\sin\chi$$

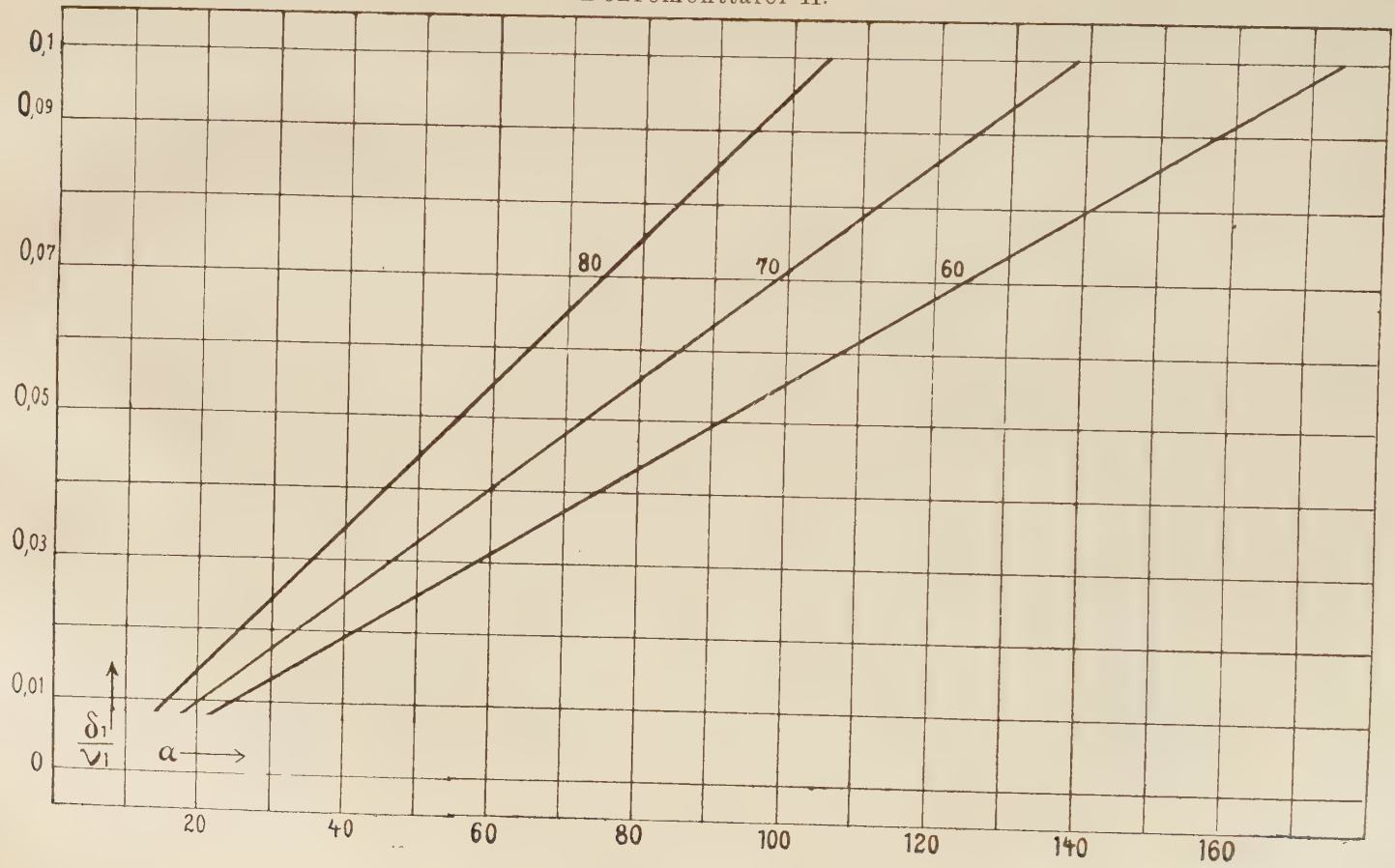
folgt

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{w_2}{L_{22}}\cdot\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2 L_{22}} = -\frac{L_{12}}{L_{22}} J_1\, e^{+\nu_1 jt - j\chi} \cdot e^{-\delta_2 t} \cdot \sigma.$$


0,1
0,0,7
0,0,5
0,0,3
0,0,1
0
$\frac{\Omega_1}{\nu_1}$
a →
85
75
65
55
20
40
60
80
100
120
140
160

Tafel III.

Dekrementtafel II.



Dieser Gleichung wird genügt durch

$$i_2 = -J_1 \frac{\sigma}{\varrho} \frac{L_{12}}{L_{22}} e^{-\delta_2 t} e^{j(\nu_1 t - \chi)}$$

wo nunmehr $\varrho = \nu_2^2 - \nu_1^2$.

Weiter folgt ähnlich wie im allgemeinen Falle

$$i_2 = J_1 e^{-\delta_2 t} \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \left[\cos\chi \cos\nu_2 t + \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin\chi \sin\nu_2 t - \cos(\nu_1 t - \chi) \right].$$

Somit wird nun

$$Q = c \int_0^\infty i_2^2 \, dt$$

$$= c J_1^2 \cdot \frac{L_{12}^2}{L_{22}^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\varrho^2} \cdot \left[\cos^2\chi \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \cos^2\nu_2 t \, dt + \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \sin^2\chi \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \sin^2\nu_2 t \, dt \right.$$

$$+ 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \cos\chi \sin\chi \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \cos\nu_2 t \sin\nu_2 t \, dt + \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \cos^2(\nu_1 t - \chi) \, dt$$

$$\left. - 2\cos\chi \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \cos\nu_2 t \cos(\nu_1 t - \chi) \, dt - 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin\chi \int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \sin\nu_2 t \cos(\nu_1 t - \chi) \, dt \right]$$

Diese 6 Integrale sollen nunmehr ausgewertet werden.

1. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \cos^2\nu_2 t \, dt = \left| \frac{-2\delta_2 \cos\nu_2 t + 2\nu_2 \sin\nu_2 t}{4\delta_2^2 + 4\nu_2^2} \cdot e^{-2\delta_2 t} \cos\nu_2 t \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu_2^2}{4\delta_2^2 + 4\nu_2^2} \cdot \frac{1}{-2\delta_2} e^{-2\delta_2 t} \right|_0^\infty$$

$$= -\left[\frac{-2\delta_2}{4\delta_2^2 + 4\nu_2^2} + \frac{2\nu_2^2}{-2\delta_2 4(\delta_2^2 + \nu_2^2)} \right]$$

$$= \frac{2\delta_2^2 + \nu_2^2}{4\delta_2(\delta_2^2 + \nu_2^2)}.$$

2. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t} \sin^2\nu_2 t \, dt$$

$$= \left| \frac{-2\delta_2 \sin\nu_2 t - 2\nu_2 \cos\nu_2 t}{4(\delta_2^2 + \nu_2^2)} \cdot e^{-2\delta_2 t} \sin\nu_2 t \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu_2^2}{4(\delta_2^2 + \nu_2^2)} \cdot \frac{1}{-2\delta_2} \right|_0^\infty$$

$$= -\frac{2\nu_2^2}{-2\delta_2 \cdot 4(\delta_2^2 + \nu_2^2)}$$

$$= \frac{\nu_2^2}{4\delta_2(\delta_2^2 + \nu_2^2)}.$$

3. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\cos\nu_2 t\sin\nu_2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin 2\nu_2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\delta_2\sin 2\nu_2 t-2\nu_2\cos 2\nu_2 t}{4(\delta_2{}^2+\nu_2{}^2)}\cdot e^{-2\delta_2 t}\right|_0^\infty$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{-2\nu_2}{4(\delta_2{}^2+\nu_2{}^2)}\right]$$

$$=\frac{\nu_2}{4(\delta_2{}^2+\nu_2{}^2)}.$$

4. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\cos^2(\nu_1 t-\chi)\,dt$$

$$=\left|\frac{-2\delta_2\cos(\nu_1 t-\chi)+2\nu_1\sin(\nu_1 t-\chi)}{4(\delta_2{}^2+\nu_1{}^2)}\cdot e^{-2\delta_2 t}\cos(\nu_1 t-\chi)\right.$$

$$\left.+\frac{2\nu_1{}^2}{4(\delta_2{}^2+\nu_1{}^2)}\cdot\frac{1}{-2\delta_2}\cdot e^{-2\delta_2 t}\right|_0^\infty$$

$$=-\left[\frac{-2\delta_2\cos\chi-2\nu_1\sin\chi}{4(\delta_2{}^2+\nu_1{}^2)}\cos\chi-\frac{\nu_1{}^2}{4\delta_2(\delta_2{}^2+\nu_1{}^2)}\right]$$

$$=\frac{(2\delta_2{}^2\cos\chi+2\nu_1\delta_2\sin\chi)\cos\chi+\nu_1{}^2}{4\delta_2(\delta_2{}^2+\nu_1{}^2)}.$$

5. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\cos\nu_2 t\cos(\nu_1 t-\chi)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\cos\{(\nu_2+\nu_1)t-\chi\}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\cos\{(\nu_2-\nu_1)t+\chi\}\,dt\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\delta_2\cos\{(\nu_2+\nu_1)t-\chi\}+(\nu_2+\nu_1)\sin\{(\nu_2+\nu_1)t-\chi\}}{4\delta_2{}^2+(\nu_2+\nu_1)^2}\cdot e^{-2\delta_2 t}\right.$$

$$\left.+\frac{-2\delta_2\cos\{(\nu_2-\nu_1)t+\chi\}+(\nu_2-\nu_1)\sin\{(\nu_2-\nu_1)t+\chi\}}{4\delta_2{}^2+(\nu_2-\nu_1)^2}\cdot e^{-2\delta_2 t}\right|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-2\delta_2\cos\chi-(\nu_2+\nu_1)\sin\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2+\nu_1)^2}+\frac{-2\delta_2\cos\chi+(\nu_2-\nu_1)\sin\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2-\nu_1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\delta_2\cos\chi+(\nu_2+\nu_1)\sin\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2+\nu_1)^2}+\frac{2\delta_2\cos\chi-(\nu_2-\nu_1)\sin\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2-\nu_1)^2}\right\}.$$

6. $$\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin(\nu_2 t\cos(\nu_1 t-\chi)\,dt=\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin[(\nu_2+\nu_1)t-\chi]\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty e^{-2\delta_2 t}\sin[(\nu_2-\nu)t+\chi]\,dt\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\delta_2\sin[(\nu_2+\nu_1)t-\chi]-(\nu_2+\nu_1)\cos[(\nu_2+\nu_1)t-\chi]}{(-2\delta_2)^2+(\nu_2+\nu_1)^2}e^{-2\delta_2 t}\right.$$

$$+\frac{-2\delta_2 \sin[(\nu_2-\nu_1)t+\chi]-(\nu_2-\nu_1)\cos[(\nu_2-\nu_1)t+\chi]}{(-2\delta_2)^2+(\nu_2-\nu_1)^2}e^{-2\delta_2 t}\Big]_0^\infty$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2\delta_2 \sin\chi-(\nu_2+\nu_1)\cos\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2+\nu_1)^2}+\frac{-2\delta_2 \sin\chi-(\nu_2-\nu_1)\cos\chi}{4\delta_2{}^2+(\nu_2-\nu_1)^2}\right].$$

Die vollständige numerische Auswertung dieses Falles behalte ich mir vor.

Für experimentelle Anordnungen sind hieraus zwei Folgerungen zu ziehen.

Für Meßkreise ist dieser Fall, in denen die Dämpfung desselben ungefähr gleich der des zu untersuchenden Schwingungskreises ist, tunlichst zu vermeiden, überhaupt ist die Differenz $\delta_1 - \delta_2$ verhältnismäßig groß zu nehmen; auf den Stationen Cröllwitz I/II Wallwitz war $\delta_1 = 8000$ und höher, während $\delta_2 \sim 5500$ erzielt wurde.

Für Systeme der drahtlosen Telegraphie aber ergibt sich folgender Schluß. Primärkreis und Antennenkreis sind beim Senden nicht nur abzustimmen auf die Wellenlängen, sondern auch durch eventuelle Zusatzwiderstände im Antennenkreis auch in bezug auf die Dämpfungen wie auch ein gleiches gilt für korrespondierende Sende- und Empfangsstationen.

Dieses theoretisch abgeleitete Resultat konnte ich aus Kurvenmaterial früherer Untersuchungen teilweise bestätigen. Systematische Arbeiten waren hierüber nicht gemacht, sind aber auf den Versuchsstationen Halle – Cröllwitz — Wallwitz des Herr Professor Dr. Schmidt im vollen Gange.

§ 7.

Der Fall $\delta_1 = 0$.

Gesondert von den anderen Fällen soll hier noch kurz der Fall der ungedämpften Schwingungen behandelt werden. Es zeigt sich nun sogleich, daß für $\delta_1 = 0$ das dritte Integral Q_3 den Wert unendlich annimmt. Aber hier erhalten wir nicht, wie in § 6 eine unbestimmte Form im Isochronitätspunkt, sondern für alle Werte ν_2, ν_1 und δ_2 wird

$$Q_3 = \infty.$$

Wie in § 6 bedeutet dieses Unendlichwerden des Integrales ein Optimum für korrespondierende Systeme. Theoretisch ist also, falls Wärmeverluste nicht in Rechnung gezogen werden, keine Resonanzkurve aufzunehmen.

Was nun die Frage der Dämpfungslinien für vorliegenden Fall betrifft, so gehen diese für $\delta_1 = 0$, den geradlinigen Verlauf derselben vorausgesetzt, nicht durch den Nullpunkt, was geschehen müßte, wenn

das Integral nur im Isochronitätspunkte unendlich würde. Die weitere analytische Behandlung dieser Frage folgt in einer späteren Arbeit.

Der Charakter dieser Dämpfungslinien ist einstweilen nur an Hand einzelner Punkte bestimmt worden. Ein Versuch, diese einfache lineare Relation

$$\frac{\delta_1}{\nu_1} = tg\alpha \cdot \left(a - a_{\delta_1=0}\right)$$

direkter abzuleiten, führt vorläufig zu unüberwindbaren Schwierigkeiten. Erst müssen die Fragen über Isochronismus, Resonanz und Unsymmetrie gelöst sein, dann erst ist es möglich, die Berechnung dieser Formel zu versuchen. Sie wird übrigens analytisch keine lineare Beziehung ergeben, sondern einen Ausdruck aus mehreren Faktoren, da der Fall $\delta_1 = \delta_2$ einen merkwürdigen Punkt gibt und der Fall $\delta_1 = 0$ unter obiger Voraussetzung auf $a \neq 0$ führt, der oben durch $a_{\delta_1=0}$ bebezeichnet ist.

§ 8.

Zur Unsymmetrie.

Bei der Frage nach der Unsymmetrie der Resonanzkurven sind zunächst bei den theoretischen Kurven zwei Punkte zu unterscheiden. Es ist klar, daß in bezug auf den Resonanzpunkt vollkommen symmetrische Kurven dann unsymmetrisch werden, wenn sie auf den Isochronitätspunkt bezogen werden; hieraus folgt ein guter Teil der in Tafel I hervortretenden Unsymmetrie.

Es tritt nun aber zweitens die Frage auf, ob überhaupt die Kurven unsymmetrisch sind zum Resonanzpunkt. Um diese Frage zu unterscheiden, ging ich aus von der Überlegung, daß, wenn jedes Integral eine symmetrische Kurve darstellt und außerdem jedes für einen allen gemeinsamen Wert die Gleichungen

$$\frac{d\,Q_n}{d\,\nu_2} = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ 3$$

erfüllt, daß dann auch die Gesamtkurve symmetrisch sein muß. Wir würden also des Resonanzpunktes bedürfen. Jedoch zeigt es sich, daß Q_2 vollkommen unsymmetrisch zu jeder beliebigen Geraden liegt. Die Tafel IV zeigt die Integrale Q_1, Q_3 und Tafel V den Teil Q_{21} von Q_2. Hier zeigt es sich, daß das Q_{21} eine einseitige Überhebung für Q veranlaßt.

Es ist bei den hier berechneten Fällen von

$$\delta_1\,\nu_1^{-1} = 0{,}008,\ 0{,}01,\ 0{,}05,\ 0{,}1$$

für

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} > 1$$

innerhalb des angegebenen Intervalles

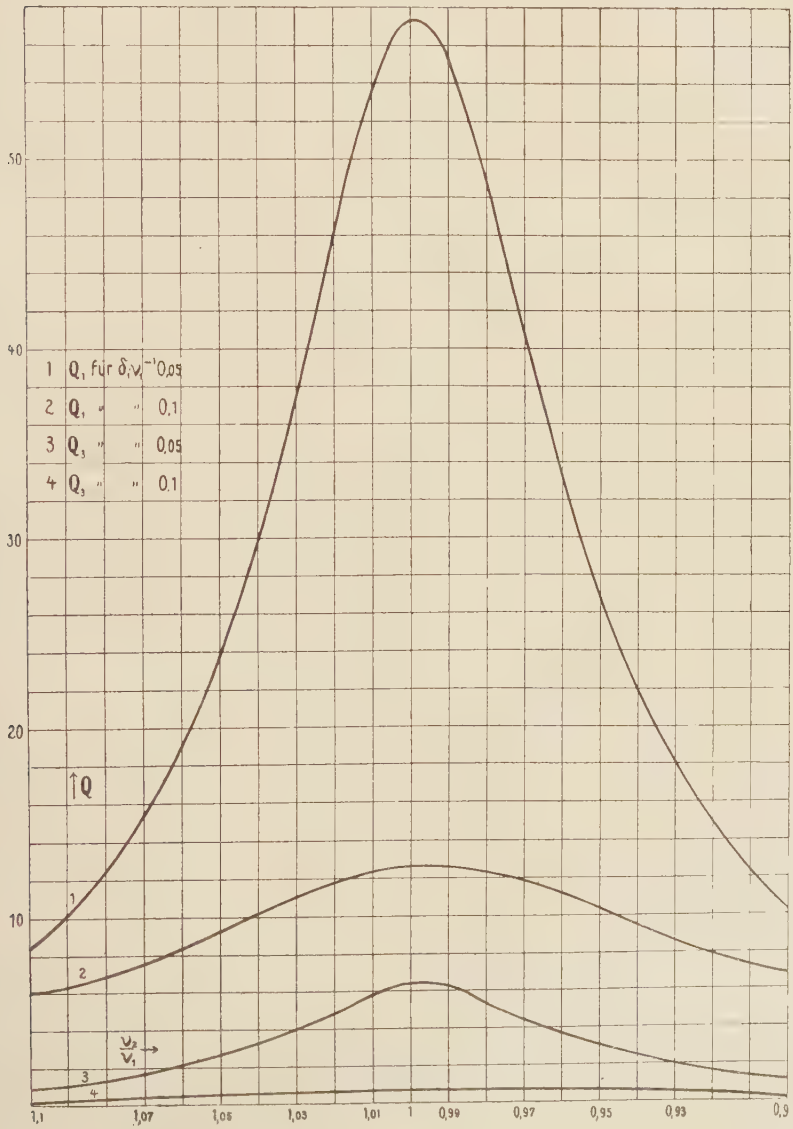
$$0{,}1 < \varepsilon < 0$$

Q_{21} positiv. Für die Werte

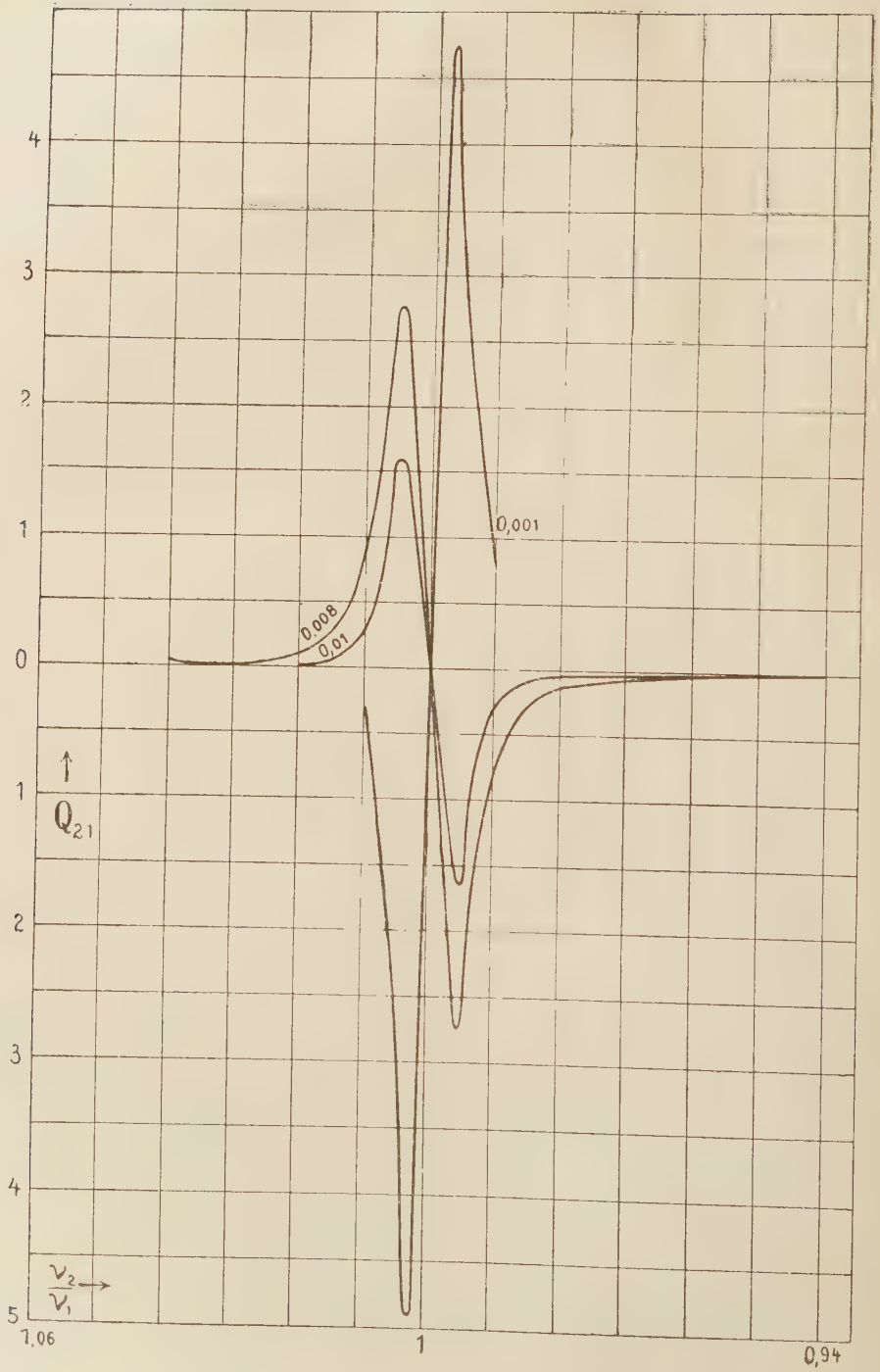
$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \varepsilon$$

ist es kleiner als für die entsprechenden Werte $1 + \varepsilon$ bei gleichem ε.

Tafel IV.



Tafel V.


4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
0,001
0,008
0,01
↑
Q_{21}
$\frac{\nu_2}{\nu_1}\rightarrow$
1,06
1
0,94

Es kommt also zu den Kurven von Q_1 und Q_3 bei

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} < 1 \text{ auf der Seite } \frac{\nu_2}{\nu_1} > 1$$

ein größerer Wert hinzu als für

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} < 1,$$

was eine Überhebung veranlaßt.

Für $\frac{\delta_2}{\delta_1} > 1$ tritt, wie sich bei Auswertung für $\delta_1 = 0{,}001$ ergeben hat, das Umgekehrte ein (vergl. Tafel V).

In Tafel VI S. 28 sind die Beiträge zum Gesamtwerte des Integrales für $\delta_1 \nu_1^{-1} = 0{,}01$ einzeln dargestellt. Die Unsymmetrie von Q_2 ist hierbei nicht zu erkennen.

Es zeigt aber weiter diese Zusammenstellung der drei Integrale, daß das Integral Q_2 (vergl. S. 28) die Resonanzkurve wesentlich verbreitert und daß also die Abhandlungen, die sich lediglich des Q_1 bedient haben, für die Dämpfungsgröße zu kleine Werte erhalten haben; wir werden dies im folgenden Paragraphen, welcher die hauptsächlichsten Methoden der Dämpfungsmessung enthält, noch genauer kennen lernen.

§ 9.

Andere graphische Methoden.

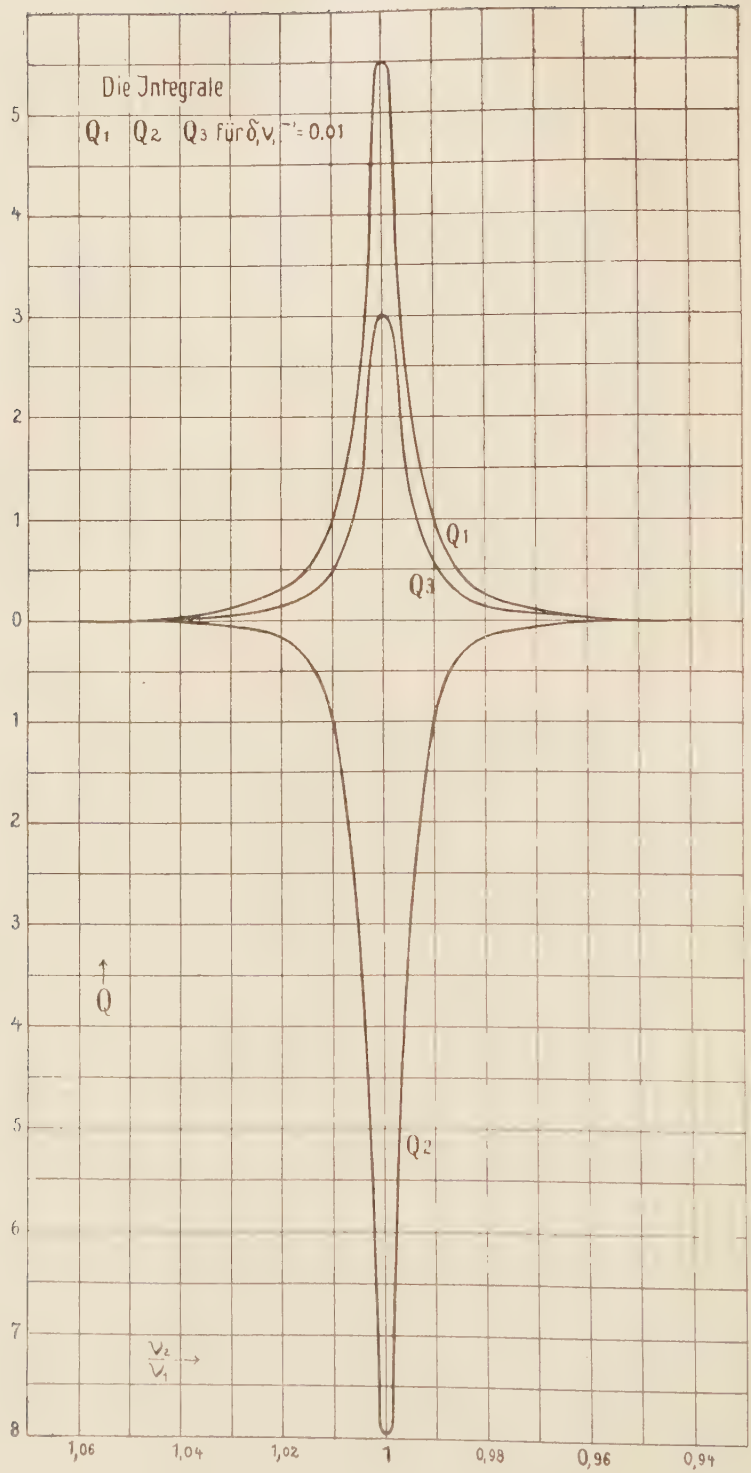
Die zahlreichen Bjerknesschen Arbeiten, welche der Untersuchung des Dämpfungsphänomens gewidmet sind, gehen entweder aus von den Reflexions- oder Resonanzerscheinungen. In der Hauptarbeit: „Elektrische Resonanz“[1] stellt er die Resonanzkurvengleichung auf, und erhält eine Kurve dritter Ordnung. Aus dieser Kurve läßt sich dann die Größe der Sehne im Isochronitätspunkte, die parallel zur $\frac{\nu_2}{\nu_1}$-Achse geht, ableiten und weiter leicht der Satz, daß die Schar paralleler Sehnen zur $\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)$-Achse Mittelpunkte haben, die auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen. Die Asymptoten sind die $\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)$-Achse und die Gerade

$$x = 1 - \frac{(\delta_2 + \delta_1) + \delta_2\delta + \delta_1}{2(\pi^2 + (\delta\delta_2 + \delta_1)^2)},$$

wobei $x = \frac{\nu_2}{\nu_1}$ und δ den Änderungskoeffizienten des logarithmischen Dekrementes bei variablem L bedeutet. Weiter untersuchte dann Bjerknes den „systematischen Fehler“, den er dadurch in die Kurve

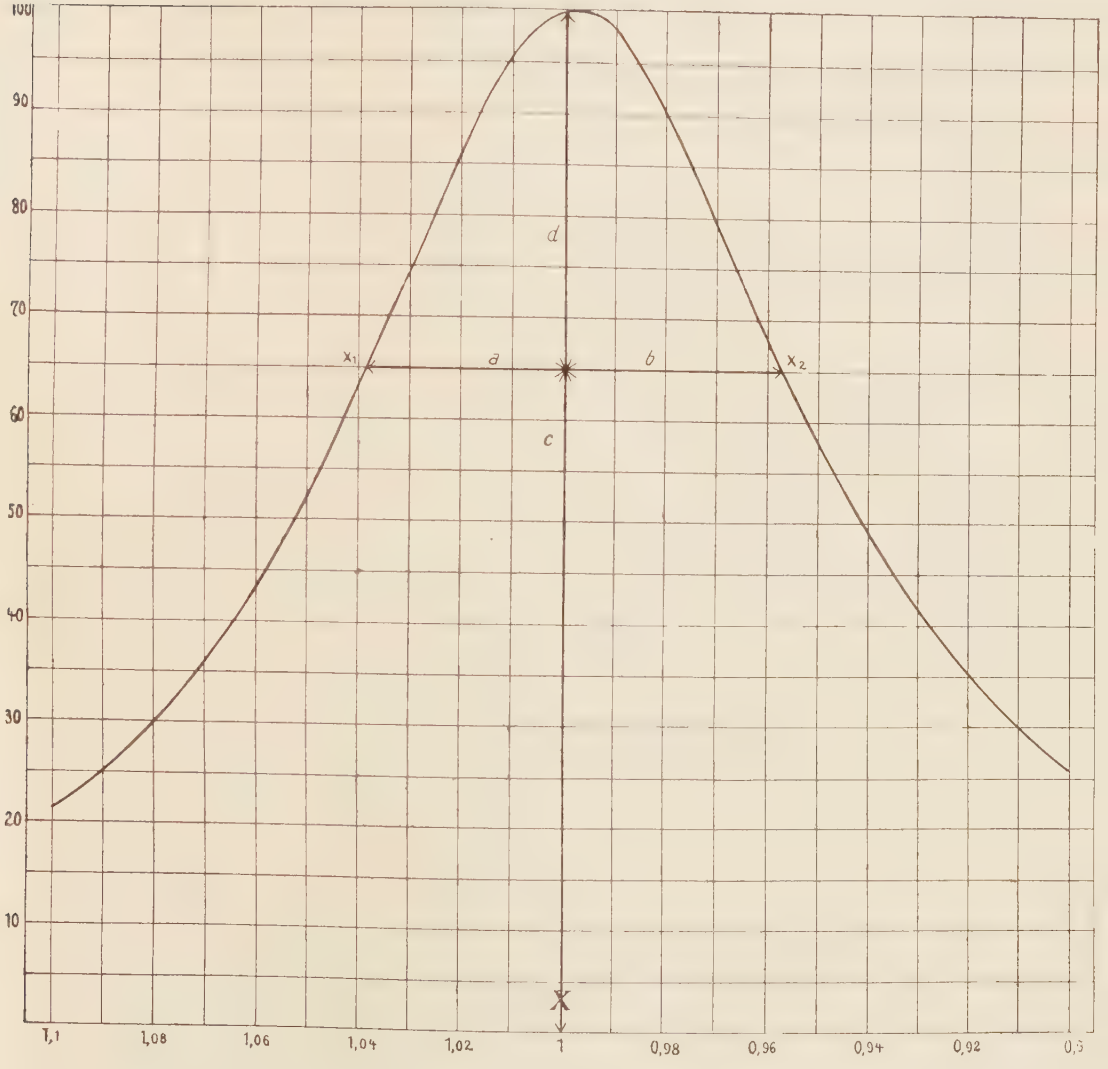
1) Wied. Annal. 44 S. 74, 513; 55 S. 121.

Tafel VI.


Die Integrale
Q1 Q2 Q3 für δ,ν, = 0.01
Q1
Q3
Q2
Q
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
1,06
1,04
1,02
1
0,98
0,96
0,94

brachte, daß er seinen Parameter S, die Isochronitätssehne, als konstant und nicht als Funktion von δ annahm. Dies erledigt sich aus dem vorigen Paragraphen.

Tafel VII.



Es soll hier untersucht werden, wie weit Bjerknes trotz der Vernachlässigungen mit den exakten Größen übereinstimmende Ergebnisse erhält. Ich nehme an, die Kurve $Q = 0$ für $\delta_1 = 0{,}05$ (S. 29) sei experimentell gefunden (es ist eine Kurve von Tafel 1) und es soll die zugehörige Dämpfung des Primärkreises nach Bjerknes bestimmt werden.

Es ist $\delta_1 \cdot \nu_1^{-1} = 0{,}05$ d. h. $\mathcal{A} = 0{,}314$ gewählt, weil dieses die Größe ist, die bei Bjerknes am meisten auftritt. Seine Formel lautet

$$\omega = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{\pi}{X} \cdot \sqrt{\frac{abc}{d}},$$

wobei die Bedeutung der Größen aus der Figur (S. 29) zu ersehen ist. Es ist nun

$$a = X - x_1$$
$$b = x_2 - X,$$

also wird

$$\omega = \pi \sqrt{\left(1 - \frac{x_1}{X}\right)\left(\frac{x_2}{X} - 1\right)\frac{c}{d}},$$

wobei die x die Schwingungsdauer bedeuten, und zwar ist

$$X = \frac{1}{\nu_R}$$
$$x_1 = \frac{1}{\nu_1}$$
$$x_2 = \frac{1}{\nu_2},$$

woraus folgt

$$\omega = \pi \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\nu_R}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_R}{\nu_2} - 1\right) \cdot \frac{c}{d}}$$

und bei Vernachlässigung des Wertunterschiedes zwischen

$$\nu_R \text{ und } \nu_{Js}$$

$$\omega = \pi \sqrt{\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon'}\right)\frac{c}{d}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{(1+\varepsilon-1)}{1+\varepsilon} \cdot \frac{(1+\varepsilon'-1)}{1+\varepsilon'} \cdot \frac{c}{d}}$$

$$= \pi \sqrt{\varepsilon\varepsilon' \frac{c}{d}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon\varepsilon'}}$$

Nun sind

	ε	ε'	c	d	$\sqrt{\varepsilon\varepsilon' \frac{c}{d}}$
80	0,025	0,029	0,8	0,2	0,0557
70	0,034	0,0385	0,7	0,3	0,0551
60	0,043	0,048	0,6	0,4	0,0556

Der noch hinzutretende Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon\varepsilon'}}$$

ist ungefähr 0,98 bis 0,99. Es ergibt sich hieraus also, daß die Abweichungen bei Bjerknes sehr gering sind und im Maximum 1 % betragen.

Um auf die von Zenneck[1]) angegebene Formel zu kommen, haben wir nur statt des geometrischen Mittels der Größen ε, ε' das arithmetische zu nehmen. Denn setzt man

$$c + d = 1$$
$$c = y$$
$$d = 1 - y$$
$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} = x,$$

so erhält man

$$\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 = 2\pi \cdot x \sqrt{\frac{y}{1-y}},$$

d. h. die von Zenneck l. c. S. 1008 angegebene Formel. Die Größe der Abweichung zwischen Bjerknes und Zenneck bestimmt sich einfach aus dem Cauchyschen Satz über die Größenverhältnisse der Mittelwerte, wonach das geometrische Mittel stets kleiner ist als das arithmetische; sie ist sehr klein.

Zum Schluß will ich noch die Abhandlung von K. E. F. Schmidt, die eingangs erwähnt wurde, und die den Grundgedanken dieser Ausführungen enthält, mit den hier gefundenen Resultaten vergleichen.

Die Abweichungen ergeben sich am deutlichsten, wenn beide Systeme von Dekrementtafeln übereinander gelegt werden, wie dies auf S. 32 geschehen ist. Die Abweichungen betragen $\sim 20\,\%$.

Die Tafel S. 33 endlich zeigt uns die drei Kurven

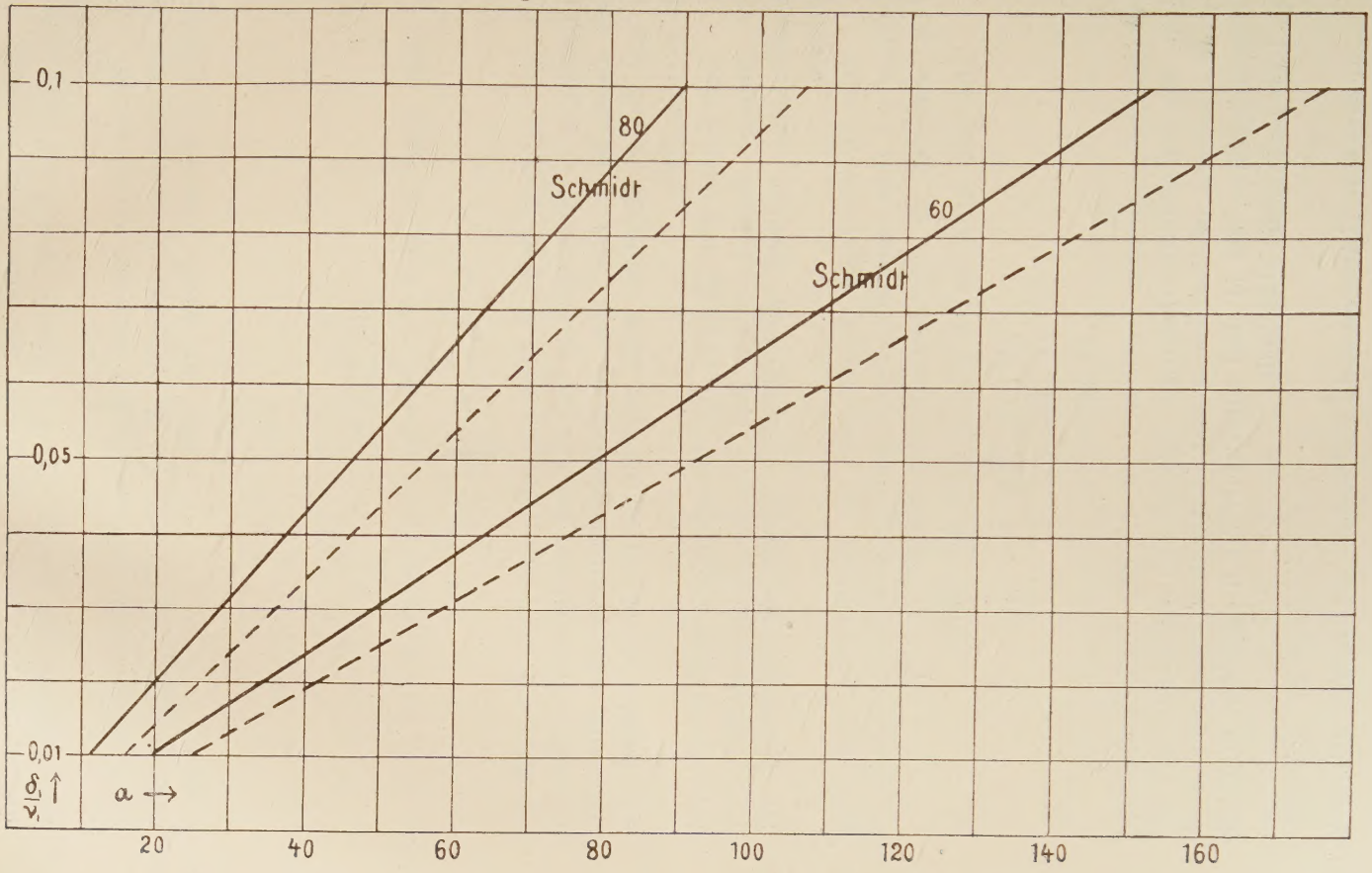
$Q_1 + Q_2 + Q_3$
Q_1 ohne δ_2
Q_1 mit δ_2.

Für die Dekrementtafeln ergibt sich für 3 außer einer Verschiebung auch eine beträchtliche Dehnung, während sich außerdem zeigt, daß die Unsymmetrie in Kurve 3 kleiner ist als in 2. Also spielen die Dämpfungsgrößen, wie ja oben allgemeiner schon dargelegt wurde, bei der Unsymmetrie die Hauptrolle.

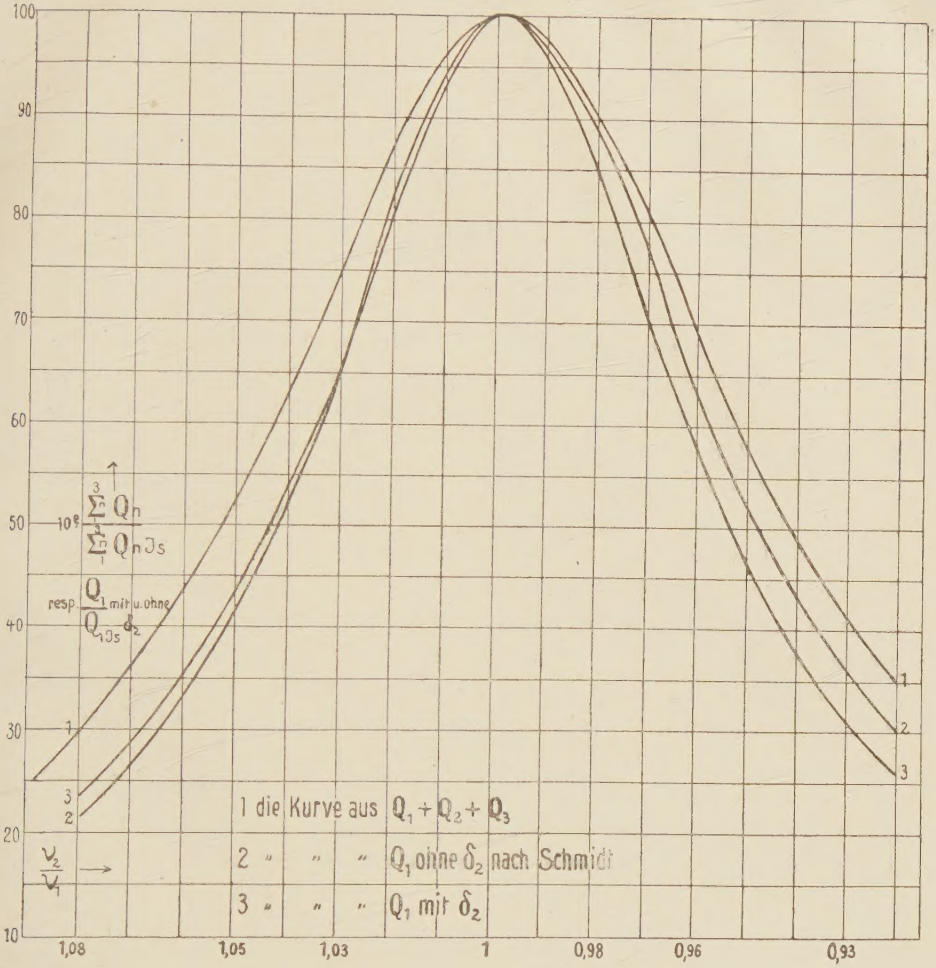
---

1) Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, S. 1008.

Tafel VIII. Vergleichende Dekrementtafel.



Tafel IX.



§ 10.

Zusammenfassung.

Die Arbeit gibt zunächst eine streng durchgeführte Integration der Differentialgleichung des Schwingungsproblemes für eine erzwungene Schwingung und die Eigenschwingung. Die numerische Auswertung der Resonanzkurven zeigt deren Unsymmetrie und läßt uns weiter neue Dekrementtafeln gewinnen. Die Spezialfälle $\delta_1 = \delta_2$ und $\delta_1 = 0$ führen zu analytisch nicht leicht zu lösenden Schwierigkeiten und gestatten beide nicht ohne weiteres eine numerische Auswertung.

Ein Vergleich mit den älteren Methoden zeigt, daß die Bjerknessche Methode der Bestimmung der Dämpfung trotz der großen Vernachlässigungen einwandfreie Resultate liefert.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Max Karl Grober, evangelischer Konfession, am 3. Oktober 1883 in Sprötau, Großherzogtum S.-Weimar-Eisenach, als Sohn des Lehrers Karl Grober und seiner Ehefrau Ida geb. Brauer. Meine Schulbildung erhielt ich auf der Dorfschule zu Sprötau, der Vorschule und dem Gymnasium zu Erfurt, das ich mit dem Berechtigungsschein verließ. Ich arbeitete dann ein Jahr in einer Maschinenfabrik, studierte in Darmstadt und bestand das Maturitätsexamen in Frankfurt a. M. Nachdem studierte ich Mathematik, Physik und Philosophie in Jena, Greifswald, Leipzig und Halle a. S. 1907 bestand ich mein Examen pro facultate docendi. Von da ab war ich Assistent bei Herrn Professor Dr. Schmidt. Aller meiner verehrten Lehrer, besonders aber der Herren Professoren Geheimrat Fries, Gutzmer, Ebbinghaus (†) und Schmidt erinnere ich mich stets als dankbarer Schüler.

Zum Schluß sei es mir gestattet, meinem hochgeehrten Lehrer Herrn Professor Dr. K. E. F. Schmidt für Anregung und Anteilnahme an dieser Arbeit meinen gehorsamsten Dank auszusprechen.